Non existence de solutions d'inéquations semilinéaires dans des domaines coniques

Abdallah El Hamidi   Gennady G. Laptev

Résumé

Nous établissons des résultats de non existence de solutions pour des problèmes semilinéaires elliptiques et d'évolution d'ordre arbitraire en temps. Deux types de domaines sont considérés : les produits de cônes et les produits de cônes tronqués. On retrouve, en particulier et d'une manière tout à fait différente, le résultat dû à Ohta & Kaneko [16] concernant l'exposant critique de Fujita dans le cas d'un produit de domaines. Notre approche est fondée sur la méthode des *fonctions test* développée par Mitidieri & Pohozaev [13], Pohozaev & Tesei [18] et Pohozaev & Véron [20].

Abstract

Nonexistence of global solutions to semilinear elliptic and "heigher- order evolution" inequalities is studied. Two types of domains are considered: product of cones and product of cone-like domains. We find, in particular and with a different method, the result of Ohta & Kaneko [16] concerning Fujita's exponents on product domains. Our approach is based on the test-function method, developed by Mitidieri & Pohozaev [13], Pohozaev & Tesei [18] and Pohozaev & Véron [20].

Received by the editors November 2002.

Communicated by P. Godin.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 35R45 (35G25 35K55 35L70).

Key words and phrases : non existence, inéquations semilinéaires, domaines coniques, exposant critique de Fujita.

1 Introduction et Notations

Dans cet article on s'intéresse à la non existence de solutions globales (non triviales) pour des inéquations aux dérivées partielles semilinéaires dans un produit de cônes et de cônes tronqués. Dans le cas d'un cône, ces problèmes ont été posés dans les années 1980–1990 et ont été largement étudiés depuis. Pour les cas elliptique et parabolique on peut mentionner les articles de Bandle & Levine [1], Bandle & Essen [3], Egnell [5], Levine & Meier [11, 12] et l'article de synthèse de Levine [10]. Les résultats récents dans cette direction peuvent être trouvés dans la célèbre monographie de Mitidieri et Pohozaev [15] et l'article de synthèse de Deng & Levine [4].

L'article de Ohta & Kaneko [16] est consacré à la non existence de solutions pour l'équation de la chaleur semilinéaire dans un produit de deux domaines $D = D_1 \times D_2$. Les auteurs ont établi une relation entre l'exposant critique correspondant au domaine D et les exposants critiques correspondant à D_1 et D_2. Ils ont démontré en outre que la relation est optimale. Pour ce faire, les auteurs ont introduit la notion de domaine *asymptotiquement régulier à l'infini* dans le sens qu'il existe une solution non triviale du problème

$$\begin{cases} w_t = \Delta w, & (x,t) \in D_i \times]0,\infty[, \\ w(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial D_i \times]0,\infty[, \\ w(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in D_i, \quad (u_0 \text{ à support compact}), \end{cases}$$

$i \in \{1,2\}$, qui possède un certain comportement asymptotique à l'infini en temps, (ces résultats sont aussi commentés dans la revue de résultats [4]). Utilisant des propriétés de la transformation de Hankel, les auteurs ont prouvé qu'un cône est *asymptotiquement régulier à l'infini*.

Le but principal de notre travail est d'établir des résultats de non existence pour des inéquations elliptique et parabolique sans évoquer la propriété de régularité asymptotique des cônes à l'infini. De plus, nous retrouvons en particulier le résultat de Ohta & Kaneko sans utiliser la solution fondamentale de l'opérateur parabolique associé. Ceci nous permet de considérer des systèmes d'inéquations elliptique, parabolique et des systèmes d'évolution, d'ordre arbitraire en temps, qui englobent les cas des inéquations parabolique et hyperbolique. Dans ce dernier cas nous ne démontrons pas l'optimalité de nos résultats.

L'approche que nous utilisons dans cet article est fondée sur la méthode des *fonctions test* développée par Mitidieri & Pohozaev [13], Pohozaev & Tesei [18], Pohozaev & Véron [20], Zhang [23]. Quelques résultats, dans le cas d'un seul cône, ont été établis par G. Laptev [7, 8, 9].

On se donne un entier naturel $n \geq 1$, n entiers naturels $N_i \geq 3$, $i \in \{1,2,...,n\}$, et $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$. Les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^{N_i}$ seront notées par (r_i, ω_i). Soit S^{N_i-1} la sphère unitaire dans $\mathbb{R}^{N_i}$ et K_{ω_i} un ouvert de S^{N_i-1} de bord ∂K_{ω_i} assez régulier. On désignera par K_i le cône

$$K_i = \{x_i \equiv (r_i, \omega_i) \in \mathbb{R}^{N_i};\ 0 < r_i < +\infty \text{ et } \omega_i \in K_{\omega_i}\}$$

et par K le produit $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$. Le bord du cône K_i sera noté par ∂K_i et celui de K par ∂K. Pour $\varepsilon > 0$, on désignera par K_ε le produit cartésien de *cônes tronqués* $\{x \in K;\ \forall\, i \in \{1,2,...,n\},\ |x_i| > \varepsilon\}$ et par ∂K_ε son bord. Le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de ∂K_{ω_i} (resp. ∂K) sera noté ν_{ω_i} (resp. ν).

Le laplacien (appliqué à une fonction définie de $\mathbb{R}^{N_i}$ dans $\mathbb{R}$) sera noté Δ_i. Rappelons qu'en coordonnées polaires Δ_i a la forme

$$\Delta_i = \frac{1}{r_i^{N_i-1}}\frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_i^{N_i-1}\frac{\partial}{\partial r_i}\right) + \frac{1}{r_i^2}\Delta_{\omega_i} = \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{N_i-1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2}\Delta_{\omega_i},$$

où Δ_{ω_i} désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unitaire S^{N_i-1}.

On désignera par λ_{ω_i} la première valeur propre et Φ_{ω_i} la fonction propre associée du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_{\omega_i}\Phi_{\omega_i} = \lambda_{\omega_i}\Phi_{\omega_i} & \text{dans} \quad K_{\omega_i}, \\ \\ \Phi_{\omega_i} = 0 & \text{sur} \quad \partial K_{\omega_i}. \end{cases}$$

Il est bien connu que $\lambda_{\omega_i} > 0$ et que Φ_{ω_i} est une application strictement positive sur K_{ω_i}. On choisira $\Phi_{\omega_i} \leq 1$ et on désignera par Φ l'application

$$\Phi\ :\ (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \Phi_{\omega_i}(\omega_i).$$

Dans la suite, la lettre C désignera une constante qui peut varier d'une ligne à l'autre mais indépendante des termes faisant l'objet de passage à la limite.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur K sera noté $\mathcal{C}^2(K)$. De même, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la première variable et de classe $j \in \mathbb{N}^*$ par rapport à la seconde variable, sur $K\times]0,+\infty[$, sera noté $\mathcal{C}^{2,j}(K\times]0,+\infty[)$.
Finalement, pour un réel $q \geq 1$ donné, on définit le réel q' par la relation $1/q + 1/q' = 1$.

2 Résultats préliminaires

Le but de cette section est de construire un ensemble de fonctions test dont on aura besoin dans les démonstrations qui suivront.

On désignera par ζ la fonction de troncature standard définie sur $[0, +\infty[$

$$\zeta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq y \leq 1, \\ \\ 0 & \text{si} \quad y \geq 2 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \ \ 0 \leq \zeta(y) \leq 1.$$

Soit $p_0 \geq 3$ et soit la fonction η définie par

$$\eta(y) = [\zeta(y)]^{p_0}.$$

Il existe alors une constante $c_\eta > 0$ telle que pour tous $y \geq 0$ et p, $1 < p \leq p_0$, on a les deux estimations

$$|\eta'(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y) \tag{1}$$

et

$$|\eta''(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y). \tag{2}$$

En effet ; $|\eta'|^p = p_0^p\,\zeta^{p(p_0-1)}\,|\zeta'|^p$. Par suite, il existe c_η telle que (1) a lieu. L'inégalité (2) s'obtient de la même manière.

On introduit la partie de la fonction test en la variable t. Pour cela, soient un paramètre $\rho > 0$, un exposant $\theta > 0$ et la fonction $t \mapsto \eta(t/\rho^\theta)$. Remarquons que l'on a

$$\operatorname{supp}\left|\eta(t/\rho^\theta)\right| = \{t \in \mathbb{R}^+,\ \ 0 \le t \le 2\rho^\theta\}$$
$$\text{et}\quad \operatorname{supp}\left|\frac{d\eta}{dt}(t/\rho^\theta)\right| = \{t \in \mathbb{R}^+,\ \ \rho^\theta \le t \le 2\rho^\theta\},$$

où "supp" désigne le support. En outre, on a

$$\int_{\operatorname{supp}\left|\frac{d\eta}{dt}(t/\rho^\theta)\right|} \frac{\left|\frac{d\eta}{dt}(t/\rho^\theta)\right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\,dt \ \le\ c_\eta \rho^{-\theta(p-1)}. \tag{3}$$

On construit maintenant la partie de la fonction test qui porte sur les variables radiales $(r_1, r_2, ..., r_n)$. Considérons les fonctions

$$\xi_1(r_1, ..., r_n) = \prod_{i=1}^n r_i^{s_i},\ \ \xi_2(r_1, ..., r_n) = \prod_{i=1}^n \eta(r_i/\rho)\ \ \text{et}\ \ \xi(r_1, ..., r_n) = (\xi_1\xi_2)(r_1, ..., r_n),$$

où $s_i > 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Nous noterons pour tout i dans $\{1, 2, ..., n\}$

$$\xi_1^{(i)}(r_1, ..., r_n) = \prod_{j=1, j\neq i}^n r_j^{s_j} \quad \text{et} \quad \xi_2^{(i)}(r_1, ..., r_n) = \prod_{j=1, j\neq i}^n \eta(r_j/\rho).$$

On se propose d'établir des estimations portant sur $\partial\xi/\partial r_i$ et $\partial^2\xi/\partial r_i^2$. Pour ne pas alourdir les notations, nous ôterons la variable $(r_1, ..., r_n)$. Ainsi,

$$\frac{\partial\xi}{\partial r_i} = s_i r_i^{s_i-1}\xi_1^{(i)}\xi_2 + \frac{1}{\rho}\eta'(r_i/\rho)\xi_1\xi_2^{(i)},$$

et par suite, il existe $c_p > 0$ tel que

$$\left|\frac{\partial\xi}{\partial r_i}\right|^p \le c_p s_i^p r_i^{p(s_i-1)} \left[\xi_1^{(i)}\right]^p \xi_2^p + \frac{c_p}{\rho^p}|\eta'(r_i/\rho)|^p \xi_1^p \left[\xi_2^{(i)}\right]^p.$$

Il existe donc une constante $C > 0$, indépendante de ρ et des r_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, telle que

$$\left|\frac{\partial\xi}{\partial r_i}\right|^p \le C r_i^{p(s_i-1)} \left[\xi_1^{(i)}\right]^p \xi_2^{p-1}\left(1 + \frac{r_i^p}{\rho^p}\right). \tag{4}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\xi}{\partial r_i^2} &= s_i(s_i-1)r_i^{s_i-2}\xi_1^{(i)}\xi_2 + \frac{2s_i}{\rho}r_i^{s_i-1}\eta'(r_i/\rho)\xi_1^{(i)}\xi_2^{(i)} + \frac{1}{\rho^2}\eta''(r_i/\rho)\xi_1\xi_2^{(i)},\\ &= r_i^{s_i-2}\left\{s_i(s_i-1)\xi_1^{(i)}\xi_2 + 2s_i\frac{r_i}{\rho}\eta'(r_i/\rho)\xi_1^{(i)}\xi_2^{(i)} + \frac{r_i^2}{\rho^2}\eta''(r_i/\rho)\xi_1^{(i)}\xi_2^{(i)}\right\}.\end{aligned}$$

Il existe une constante $C > 0$, indépendante de ρ et des r_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, telle que

$$\left|\frac{\partial^2 \xi}{\partial r_i^2}\right|^p \leq C r_i^{p(s_i-2)} \left[\xi_1^{(i)}\right]^p \xi_2^{p-1} \left(1 + \frac{r_i^p}{\rho^p} + \frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}}\right). \tag{5}$$

On introduit maintenant la fonction, qui dépend aussi des variables polaires $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$:

$$(r_1, r_2, ..., r_n, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \longmapsto \xi_1(r_1, r_2, ..., r_n)\Phi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n).$$

On a alors, en omettant les variables $(r_1, r_2, ..., r_n)$ et $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$,

$$\Delta(\xi_1 \Phi) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ r_i^{s_i-2} \left[s_i(s_i-1) + s_i(N_i-1) - \lambda_{\omega_i}\right] \xi_1^{(i)} \right\} \Phi,$$

A ce stade, on introduit le paramètre

$$s_i^* = -\frac{N_i - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_{\omega_i}},$$

qui n'est autre que la racine positive du trinôme $s_i(s_i-1) + s_i(N_i-1) - \lambda_{\omega_i}$. Posons maintenant

$$\xi_*(r_1, r_2, ..., r_n) = \prod_{i=1}^{n} r_i^{s_i^*}$$

et

$$\psi_\rho(x) = \xi_*(r_1, r_2, ..., r_n)\, \xi_2(r_1, r_2, ..., r_n)\, \Phi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n).$$

Notons que pour tout $x = (r_1, ..., r_n, \omega_1, ..., \omega_n) \in K$, nous avons

$$\Delta(\xi_*(r_1, ..., r_n)\Phi(\omega_1, ..., \omega_n)) = 0.$$

Soit n_{ω_i} le vecteur unitaire normal extérieur à K_{ω_i}, alors

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \nu_{\omega_i}} = \xi_* \xi_2 \Phi^{(i)} \frac{\partial \Phi_i(\omega_i)}{\partial \nu_{\omega_i}}.$$

En utilisant le lemme de Hopf on obtient

$$\frac{\partial \Phi_i(\omega_i)}{\partial \nu_{\omega_i}} \leq 0, \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \nu_{\omega_i}} \leq 0.$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \nu}|_{\partial K} \leq 0. \tag{6}$$

Si l'on désigne par Δ_i le laplacien par rapport à la variable $x_i = (r_i, \omega_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, et en utilisant le fait que $\Delta_{\omega_i}(\psi_\rho)(x) = -\lambda_{\omega_i}(\psi_\rho)(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\Delta(\psi_\rho)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(\psi_\rho)(x), \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2(\psi_\rho)}{\partial r_i^2}(x) + \frac{N_i - 1}{r_i} \frac{\partial(\psi_\rho)}{\partial r_i}(x) + \frac{1}{r_i^2} \Delta_{\omega_i}(\psi_\rho)(x) \right\}, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{N_i - 1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} - \frac{\lambda_{\omega_i}}{r_i^2} \right\} \psi_\rho(x), \\
&= \Phi(\omega_1, .., \omega_n) \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{N_i - 1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} - \frac{\lambda_{\omega_i}}{r_i^2} \right\} (\xi_* \xi_2)(r_1, .., r_n).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\Delta_i(\psi_\rho)|^p &= \Phi^p \left| \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{N_i - 1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} - \frac{\lambda_{\omega_i}}{r_i^2} \right\} (\xi_* \xi_2) \right|^p, \\
&\leq C \Phi^p r_i^{p(s_i-2)} \left[\xi_*^{(i)}\right]^p \xi_2^{p-1} \left(1 + \frac{r_i^p}{\rho^p} + \frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}}\right), \qquad (7) \\
&\leq C \psi_\rho^{p-1} \frac{\xi_*}{r_i^{2p}} \left(1 + \frac{r_i^p}{\rho^p} + \frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}}\right).
\end{aligned}$$

Du fait que $\eta(r_i/\rho) = 1$ pour $r_i \leq \rho$ et $\eta(r_i/\rho) = 0$ pour $r_i \geq 2\rho$, si l'on pose

$$\mathcal{N}_i = \{x \in K;\ \Delta_i \psi_\rho \neq 0\},$$

on a $\mathcal{N}_i \subset \{x \in K;\ \rho < r_i < 2\rho\}$, et l'expression

$$1 + \frac{r_i^p}{\rho^p} + \frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}}$$

est bornée pour tout $x \in \mathcal{N}_i$. Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{N}_i,\ \ |\Delta_i(\psi_\rho)(x)|^p \leq C \psi_\rho^{p-1}(x)\, \rho^{-2p + \sum_{j=1}^n s_j^*}. \qquad (8)$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i(\psi_\rho)|^p}{\psi_\rho^{p-1}}\, dx &\leq C \int_\rho^{2\rho} \int_{K_{\omega_i}} \left\{ \int_{[0,2\rho]^{n-1}} \int_{\prod_{j\neq i} K_{\omega_j}} \frac{\prod_{k=1}^n r_k^{N_k - 1} \prod_{j \neq i} dr_j\, d\omega_j}{\rho^{2p - \sum_{i=1}^n s_i^*}} \right\} d\omega_i\, dr_i \\
&\leq C\, \rho^{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2p}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

On choisit comme fonction test finale

$$\varphi_\rho(x,t) = \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right) \psi_\rho(x).$$

On va établir deux estimations concernant la fonction φ_ρ. La première estimation est

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i(\varphi_\rho)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}}(x,t)\, dx\, dt &\leq \int_0^{2\rho^\theta} \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right) dt \int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i(\psi_\rho)|^p}{\psi_\rho^{p-1}}\, dx, \\
&\leq C\, \rho^{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2p + \theta} \qquad (10)
\end{aligned}$$

et la deuxième est

$$\begin{aligned}
\int \int_{\mathrm{supp}\left|\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t}\right|} \frac{\left|\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t}(x,t)\right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t)}\, dx\, dt &\leq \int_K \psi_\rho(x)\, dx \int_{\mathrm{supp}\left|\frac{d\eta}{dt}(t/\rho^\theta)\right|} \frac{\left|\frac{d\eta}{dt}(t/\rho^\theta)\right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\, dt, \\
&\leq C\, \rho^{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i)} \rho^{-\theta(p-1)}, \\
&\leq C\, \rho^{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - \theta(p-1)}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

3 Cas où le domaine est un produit de cônes

Dans cette section, on établit des résultats de non existence de solutions pour des problèmes semilinéaires elliptiques et d'évolution d'ordre arbitraire en temps. Le signe de la solution à l'intérieur du domaine étudié est arbitraire. Il est vrai que, sous les hypothèses que nous ferons, le principe du maximum garantit la positivité des solutions dans les cas elliptique et parabolique. Mais ce n'est pas le cas dans les problèmes d'évolution d'ordre supérieur à deux en temps.

3.1 Inéquations elliptiques

Considérons le problème elliptique non linéaire

$$(E)\quad \begin{cases} -\Delta u & \geq & |u|^q, \quad x \in K, \\ u(x) & \geq & 0, \qquad x \in \partial K. \end{cases}$$

Définition 1. Soit $u \in C(\overline{K})$. La fonction u est dite solution faible du problème (E) si, pour toute fonction positive $\varphi \in \mathcal{C}^2(K)$ à support compact et telle que $\varphi|_{\partial K} = 0$, on a

$$\int_K |u|^q(x)\varphi(x)\,dx \leq -\int_K u(x)\Delta\varphi(x)\,dx + \int_{\partial K} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x)\,dx,$$

où $\partial\varphi/\partial\nu$ désigne la dérivée normale de φ.

Théorème 1. *Si*

$$1 < q \leq q_e^* = 1 + \frac{2}{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2}$$

alors le problème (E) ne possède aucune solution faible non triviale.

Preuve. Supposons que le problème (E) possède une solution faible u non triviale avec $1 < q \leq q_e^*$. On choisit $\varphi(x) = \psi_\rho(x)$ dans la définition 1. Précisons d'abord que $\int_K u(x)\Delta\psi_\rho(x)\,dx$ est bien convergente. De même, l'intégrale

$$\int_{\partial K} u(x)\frac{\partial\psi_\rho}{\partial\nu}(x)\,dx,$$

où ν désigne la normale unitaire extérieure à ∂K, est convergente. En effet, la fonction u est continue et bornée au voisinage de $r_i = 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, et la fonction test ψ_ρ possède des dérivées partielles premières intégrables sur ∂K. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\int_K |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx &\leq -\int_K u(x)\Delta\psi_\rho(x)\,dx + \int_{\partial K} u(x)\frac{\partial\psi_\rho}{\partial\nu}(x)\,dx,\\
&\leq -\int_K u(x)\Delta\psi_\rho(x)\,dx,\\
&\leq -\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}_i} u(x)\Delta_i\psi_\rho(x)\,dx,\\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}_i} |u(x)||\Delta_i\psi_\rho(x)|\,dx,\\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{\mathcal{N}_i} |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i\psi_\rho(x)|^{q'}}{\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right)^{1/q'},\\
&\leq \left(\int_K |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx\right)^{1/q} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i\psi_\rho(x)|^{q'}}{\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right)^{1/q'},\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_K |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx\right) + C\sum_{i=1}^n \left(\int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i\psi_\rho(x)|^{q'}}{\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_K |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx &\leq C\sum_{i=1}^n \left(\int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i\psi_\rho(x)|^{q'}}{\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right),\\
&\leq C\,\rho^{\sum_{i=1}^n (s_i^*+N_i)-2q'},
\end{aligned}$$

Notons que pour $q>1$, on a

$$\sum_{i=1}^n (s_i^*+N_i) - 2q' \leq 0 \quad \text{équivaut} \quad 1 < q \leq q_e^* = 1 + \frac{2}{\sum_{i=1}^n (s_i^*+N_i) - 2}$$

et dans ce cas $\int_K u^q(x)\psi_\rho(x)\,dx$ est bornée uniformément par rapport à ρ. D'après le théorème de la convergence monotone, on déduit que $|u|^q\,\xi_*\,\Phi \in L^1(K)$. D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
\int_K |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx &\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{\mathcal{N}_i} |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\mathcal{N}_i} \frac{|\Delta_i\psi_\rho(x)|^{q'}}{\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right)^{1/q'},\\
&\leq C\sum_{i=1}^n \left(\int_{\mathcal{N}_i} |u|^q(x)\psi_\rho(x)\,dx\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée on conclut que

$$\int_K |u|^q(r,\omega)\xi_*(r)\,\Phi(\omega)\prod_{i=1}^n r_i^{N_i-1}\,dr\,d\omega \equiv 0.$$

Ceci entraîne que $u\equiv 0$, ce qui contredit le fait que u est une solution faible non triviale de (E). ∎

3.2 Inéquations paraboliques

Soit maintenant le problème parabolique non linéaire

$$(P)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u & \geq \ |u|^q, \qquad x \in K\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) & \geq \ 0, \qquad (x,t) \in \partial K\times]0,+\infty[, \\ u(x,0) & \geq \ 0, \qquad x \in K. \end{cases}$$

Définition 2. Soit $u \in C(\overline{K} \times [0,+\infty[)$. La fonction u est dite solution faible du problème (P) si, pour toute fonction positive $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(K\times]0,+\infty[)$ à support compact et telle que $\varphi|_{\partial K\times]0,+\infty[} = 0$, on a

$$\int_0^{+\infty}\int_K |u|^q\varphi\,dx\,dt + \int_K u(x,0)\varphi(x,0)\,dx \ \leq\ -\int_0^{+\infty}\int_K u\left(\Delta\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dx\,dt + \int_0^{+\infty}\int_{\partial K} u(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x,t)\,dx\,dt.$$

Théorème 2. *Si*

$$1 < q \leq q_p^* = 1 + \frac{2}{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i)},$$

alors le problème (P) ne possède aucune solution faible non triviale.

Preuve. Supposons que le problème (P) possède une solution faible u non triviale avec $1 < q \leq q_p^*$. En choisissant $\varphi(x,t) = \varphi_\rho(x,t)$ dans la définition 2 on a

$$\int_0^{+\infty}\int_K |u|^q\varphi_\rho\,dx\,dt + \int_K u(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx \ \leq -\int_0^{+\infty}\int_K u\left(\Delta\varphi_\rho + \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}\right)dx\,dt + \int_0^{+\infty}\int_{\partial K} u(x,t)\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\nu}(x,t)\,dx\,dt.$$

La deuxième intégrale du côté gauche (resp. droit) de la précédente inégalité étant positive (resp. négative), on déduit que

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty}\int_K |u|^q\varphi_\rho\,dx\,dt \\ &\leq\ -\int_0^{+\infty}\int_K u\left(\Delta\varphi_\rho + \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}\right)dx\,dt, \\ &\leq\ -\sum_{i=1}^n\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{N}_i} u\,\Delta_i\varphi_\rho\,dx\,dt - \int_0^{+\infty}\int_K u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}\,dx\,dt, \\ &\leq\ \sum_{i=1}^n\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{N}_i} |u|\,|\Delta_i\varphi_\rho|\,dx\,dt + \int\int_{\mathrm{supp}\left|\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}\right|} u\left|\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}(x,t)\right|dx\,dt, \\ &\leq\ C\left(\int_0^{+\infty}\int_K |u|^q\varphi_\rho\right)^{1/q}\sum_{i=1}^n\left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{N}_i}\frac{|\Delta_i\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}\,dx\,dt\right)^{1/q'} + \\ &\quad\ C\left(\int_0^{+\infty}\int_K |u|^q\varphi_\rho\right)^{1/q}\left(\int\int_{\mathrm{supp}\left|\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}\right|}\frac{|\partial\varphi_\rho/\partial t|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}\right)^{1/q'}. \end{aligned}$$

En procédant de la même manière que dans la preuve précédente, et en utilisant (10) et (11), on obtient

$$\int_0^{+\infty}\int_K |u|^q\varphi_\rho\,dx\,dt \le C\,\left(\rho^{\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)-2q'+\theta}+\rho^{\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)-\theta(q'-1)}\right).$$

Si l'on choisit $\theta=2$ alors

$$\int_0^{+\infty}\int_K |u|^q\varphi_\rho\,dx\,dt \le C\,\rho^{\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)-2(q'-1)}.$$

Pour $q>1$, la condition $\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)-2(q'-1)\le 0$ est équivalente à $1<q\le q_p^*$. D'où le résultat. ∎

Remarque 1. L'exposant q_p^* que l'on a trouvé est l'exposant critique du problème (P), dans le sens où pour q vérifiant $1<q\le q_p^*$, le problème (P) n'a aucune solution globale, alors que pour $q>q_p^*$, ce même problème possède des solutions locales et globales. Ce qui est en accord avec le résultat de [16].

3.3 Inéquations d'évolution d'ordre arbitraire en temps

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, considérons le problème

$$\begin{cases}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}-\Delta u\ge |u|^q, & (x,t)\in K\times]0,\infty[,\\ \\ u(x,t)\ge 0, & (x,t)\in\partial K\times]0,\infty[,\\ \\ \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\ge 0, & x\in K.\end{cases}\tag{12}$$

Définition 3. Soit $u(x,t)\in C(\overline{K}\times[0,+\infty[)$ et supposons que les traces des fonctions $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i=1,\dots,k-1$, soient bien définies pour $t=0$. La fonction $u(x,t)$ est dite solution faible du problème (12) si pour toute fonction positive $\varphi\in\mathcal{C}^{2,k}(K\times]0,+\infty[)$ à support compact et telle que $\varphi|_{\partial K\times]0,\infty[}=0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\partial K}u\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dxdt+\int_0^\infty\int_K u\left((-1)^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}-\Delta\varphi\right)\,dxdt\\ \ge\int_0^\infty\int_K|u|^q\varphi\,dxdt+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\int_K\frac{\partial^{k-1-i}u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0)\frac{\partial^i\varphi}{\partial t^i}(x,0)\,dx\\ +\int_K\frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi(x,0)\,dx.\end{aligned}$$

Théorème 3. *Soit*

$$1<q\le q_k^*=1+\frac{2}{\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)-2+2/k}.$$

Alors le problème (12) *ne possède aucune solution faible non triviale.*

Preuve. Nous utiliserons les fonctions test décrites plus haut. On remarque que pour $p_0 \geq k+1$, l'estimation

$$|\eta^{(k)}(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y), \qquad 1 < p \leq p_0,$$

a lieu. Comme auparavant, nous avons

$$\int_{\mathrm{supp}|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|} \frac{|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\, dt \leq c_\eta \rho^{-\theta(kp-1)}. \tag{13}$$

En prenant la fonction test

$$\varphi_\rho(x,t) = \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right)\psi_\rho(x) \tag{14}$$

et $\theta = 2/k$ nous avons aussi

$$J_p \equiv \iint_{\mathrm{supp}|(-1)^k \frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho|} \frac{\left|(-1)^k \frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}}\, dx\, dt, \tag{15}$$

$$\leq c\rho^{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2p + 2/k}. \tag{16}$$

Supposons qu'il existe une solution faible non triviale $u(x,t)$ de (12). En choisissant la fonction test $\varphi(x,t) = \varphi_\rho(x,t)$, définie en (14), $p = q' > 1$ et $\theta = 2/k$ dans la définition 3, et en utilisant le fait que

$$\frac{\partial^i\varphi_\rho}{\partial t^i}(x,0) \equiv 0, \quad i = 1,\ldots,k-1,$$

nous obtenons

$$\int_K \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\, dx - \int_0^\infty \int_{\partial K} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\nu}\, dxdt + \int_0^\infty \int_K |u|^q \varphi_\rho\, dxdt$$
$$\leq \iint_{\mathrm{supp}|(-1)^k \frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho|} u\left((-1)^k \frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right) dxdt. \tag{17}$$

Finalement, nous utilisons l'inégalité de Young pour avoir l'estimation

$$\int_K \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\, dx - \int_0^\infty \int_{\partial K} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\nu}\, dxdt + \int_0^\infty \int_K |u|^q \varphi_\rho\, dxdt$$
$$\leq cJ_{q'} \leq c_0\rho^{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2q' + 2/k}. \tag{18}$$

Rappelons que l'on a

$$\int_K \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\, dx \geq 0$$

et que, d'après le lemme de Hopf, on a

$$\int_0^\infty \int_{\partial K} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\nu}\, dxdt \leq 0.$$

On conclut alors que

$$\int_0^\infty \int_K |u|^q \varphi_\rho \, dxdt$$

est bornée indépendamment de ρ si

$$\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2q' + 2/k \leq 0,$$

ou encore si

$$1 < q \leq q_k^* = 1 + \frac{2}{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2 + 2/k}.$$

En utilisant les mêmes arguments que dans les théorèmes précédents, on aboutit à $u \equiv 0$. Ce qui contredit le fait que u est supposée être non triviale. ∎

Dans le cas du problème hyperbolique ($k = 2$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \geq |u|^q, & (x,t) \in K \times]0, \infty[, \\ u(x,t) \geq 0, & (x,t) \in \partial K \times]0, \infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \geq 0, & x \in K \end{cases} \tag{19}$$

nous avons : Si

$$1 < q \leq q_2^* = 1 + \frac{2}{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 1},$$

alors le problème (19) n'a aucune solution faible non triviale.
On considère finalement le système d'inéquations

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |v|^{q_1}, & (x,t) \in K \times]0, \infty[, \\ \frac{\partial^k v}{\partial t^k} - \Delta v \geq |u|^{q_2}, & (x,t) \in K \times]0, \infty[, \\ u(x,t) \geq 0, \quad v(x,t) \geq 0, & (x,t) \in \partial K \times]0, \infty[, \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \geq 0, \quad \frac{\partial^{k-1} v}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \geq 0, & x \in K. \end{cases} \tag{20}$$

Théorème 4. *Soient* $q_1 > 1$, $q_2 > 1$ *et*

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{\sum_{i=1}^n (s_i^* + N_i) - 2 + 2/k}{2}, \quad \textit{où} \quad \gamma_1 = \frac{q_1 + 1}{q_1 q_2 - 1}, \ \textit{et} \ \gamma_2 = \frac{q_2 + 1}{q_1 q_2 - 1}.$$

Alors (20) *n'a aucune solution non triviale.*

Preuve. Supposons que (20) possède une solution non triviale (u, v). En utilisant l'inégalité de Hölder, dans la définition d'une solution faible de (20), on a

$$\int_K \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) \varphi_\rho(x,0) \, dx + \int_0^\infty \int_K |v|^{q_1} \varphi_\rho \, dxdt \leq \left(\iint_{\operatorname{supp}|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta \varphi_\rho|} |u|^{q_2} \varphi_\rho \, dxdt \right)^{1/q_2} J_{q_2}^{1/q_2'}, \tag{21}$$

$$\int_K \frac{\partial^{k-1}v}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int_0^\infty\int_K |u|^{q_2}\varphi_\rho\,dxdt$$
$$\leq \left(\iint_{\mathrm{supp}|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho|}|v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt\right)^{1/q_1} J_{q_1}^{1/q_1'}. \quad (22)$$

D'après (15), nous avons

$$J_{q_1} \leq c_0\rho^{-2q_1'+\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)+2/k} \quad \text{et} \quad J_{q_2} \leq c_0\rho^{-2q_2'+\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)+2/k}.$$

En substituant (22) dans (21), on obtient

$$\int_K \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\psi_\rho(x)\,dx + \int_0^\infty\int_K |v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt$$
$$\leq \left(\iint_{\mathrm{supp}|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho|}|v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt\right)^{1/(q_1q_2)} J_{q_1}^{1/(q_1'q_2)}J_{q_2}^{1/q_2'}.$$

D'où

$$\int_0^\infty\int_K |v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt \leq \left(J_{q_1}^{q_1-1}J_{q_2}^{q_1(q_2-1)}\right)^{1/(q_1q_2-1)} \leq C\rho^{\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)+2/k-2\gamma_1}. \quad (23)$$

En utilisant les arguments utilisés dans les théorèmes précédents, la condition

$$\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)+2/k-2\gamma_1 \leq 0$$

entraîne que $v\equiv 0$. De manière analogue, en substituant (21) dans (22), on déduit que

$$\int_0^\infty\int_K |u|^{q_2}\varphi_\rho\,dxdt \leq \left(J_{q_2}^{q_2-1}J_{q_1}^{q_2(q_1-1)}\right)^{1/(q_1q_2-1)} \leq C\rho^{\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)+2/k-2\gamma_2}. \quad (24)$$

Ainsi, la condition $\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)+2/k-2\gamma_2\leq 0$ entraîne que $u\equiv 0$.

Il est enfin clair que si $u(x,t)\equiv 0$, alors $v(x,t)\equiv 0$, et vice versa. D'où, la condition nécessaire, de non existence de solution non triviale, s'écrit

$$\max\{\gamma_1,\gamma_2\} \geq \frac{\sum_{i=1}^n(s_i^*+N_i)-2+2/k}{2}.$$

■

4 Cas où le domaine est un produit de cônes tronqués

Dans toute cette section, les résultats de non existence ne concernent que les solutions positives (≥ 0).

Nous garderons les mêmes notations qu'auparavant. Soit le paramètre réel ε tel que $0<\varepsilon<\rho$ et soient les fonctions

$$\tilde{\xi}_*(r_1,r_2,...,r_n) = \prod_{i=1}^n\left(r_i^{s_i^*}-\varepsilon^{s_i^*}\right) \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}(r_1,...,r_n) = (\tilde{\xi}_*\xi_2)(r_1,...,r_n).$$

Nous avons

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r_i} = s_i^* r_i^{s_i^*-1} \tilde{\xi}_*^{(i)} \xi_2 + \frac{1}{\rho} \eta'(r_i/\rho) \tilde{\xi}_* \xi_2^{(i)},$$

et par suite, il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r_i} \right|^p \leq C r_i^{p(s_i-1)} \left[\tilde{\xi}_*^{(i)} \right]^p \xi_2^p + C \frac{\left(r_i^{s_i^*} - \varepsilon^{s_i^*} \right)^p}{\rho^p} |\eta'(r_i/\rho)|^p \left[\tilde{\xi}_*^{(i)} \right]^p \left[\xi_2^{(i)} \right]^p.$$

Il existe donc une constante $C > 0$, indépendante de ρ, de ε et des r_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, telle que

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial r_i} \right|^p \leq C_1 r_i^{p(s_i^*-1)} \left[\xi_1^{(i)} \right]^p \xi_2^{p-1} \left(1 + \frac{r_i^p}{\rho^p} \right). \tag{25}$$

Procédant de la même manière on vérifie qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de ρ, de ε et des r_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, telle que

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial r_i^2} \right|^p \leq C r_i^{p(s_i^*-2)} \left[\tilde{\xi}_*^{(i)} \right]^p \xi_2^{p-1} \left(1 + \frac{r_i^p}{\rho^p} + \frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}} \right). \tag{26}$$

Soit la fonction

$$\chi(x) \equiv \chi(r_1, r_2, ..., r_n, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \tilde{\xi}_*(r_1, r_2, ..., r_n) \Phi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n).$$

Il est aisé de voir que

$$\Delta_i \chi(x) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{N_i - 1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} - \frac{\lambda_{\omega_i}}{r_i^2} \right\} \chi = \lambda_{\omega_i} \frac{\varepsilon^{s_i^*}}{r_i^2} \tilde{\xi}_*^{(i)} \Phi \geq 0 \tag{27}$$

dans K_ε et que $\chi|_{\partial K_\varepsilon} = 0$.

On introduit maintenant la fonction

$$\tilde{\psi}_\rho(x) = \tilde{\xi}_*(r_1, r_2, ..., r_n)\, \xi_2(r_1, r_2, ..., r_n)\, \Phi(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n).$$

D'après le théorème de Hopf, nous avons

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_\rho}{\partial \nu_{\omega_i}} \leq 0. \tag{28}$$

En plus, nous avons

$$-\frac{\partial \tilde{\psi}_\rho}{\partial r_i} |_{r_i = \varepsilon} = -s_i^* \varepsilon^{s_i^*} \xi_*^{(i)} \xi_2 \Phi \leq 0. \tag{29}$$

Par conséquent, les inégalités (28) et (29) montrent que la dérivée normale de $\tilde{\psi}_\rho$ au bord de K_ε est négative, c'est à dire

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_\rho}{\partial \nu} |_{\partial K_\varepsilon} \leq 0. \tag{30}$$

En procédant de la même manière que dans (7), il existe une constante C telle que

$$|\Delta_i(\tilde{\psi}_\rho)|^p \leq C \Phi^p r_i^{p(s_i^*-2)} \left[\tilde{\xi}_*^{(i)} \right]^p \xi_2^{p-1} \left(1 + \frac{r_i^p}{\rho^p} + \frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}} \right).$$

Mais

$$\begin{aligned} r_i^{p(s_i^*-2)}\left[\tilde{\xi}_*^{(i)}\right]^p &\leq \frac{r_i^{p(s_i^*-2)}}{r_i^{ps_i^*}-\varepsilon^{ps_i^*}}\left[\tilde{\xi}_*\right]^p, \\ &\leq \frac{1}{r_i^{2p}}\left[\tilde{\xi}_*\right]^p, \quad \text{car} \quad r_i > \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où

$$|\Delta_i(\tilde{\psi}_\rho)|^p \leq C\tilde{\psi}_\rho^{p-1}\frac{\tilde{\xi}_*}{r_i^{2p}}\left(1+\frac{r_i^p}{\rho^p}+\frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}}\right). \tag{31}$$

D'autre part, puisque $\eta(|x|/\rho) \equiv 1$ pour $|x| \leq \rho$, alors, sur l'ensemble $\{x \in K_\varepsilon;\ |x| \leq \rho\}$, nous avons $\tilde{\psi}_\rho \equiv \chi$ et $\Delta\tilde{\psi}_\rho = \Delta\chi \geq 0$. Ainsi, si l'on pose $\tilde{\mathcal{N}}_i = \{x \in K_\varepsilon;\ \Delta_i\tilde{\psi}_\rho < 0\}$, on a $\tilde{\mathcal{N}}_i \subset \{x \in K_\varepsilon;\ \rho < r_i < 2\rho\}$, et l'expression

$$1+\frac{r_i^p}{\rho^p}+\frac{r_i^{2p}}{\rho^{2p}}$$

est ainsi bornée sur $\tilde{\mathcal{N}}_i$. De manières analogues à (8) et à (9), nous obtenons respectivement

$$\forall x \in \tilde{\mathcal{N}}_i, \quad |\Delta_i(\tilde{\psi}_\rho)(x)|^p \leq C\tilde{\psi}_\rho^{p-1}\,\tilde{\xi}_*\,\rho^{-2p}, \tag{32}$$

et

$$\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i}\frac{|\Delta_i(\tilde{\psi}_\rho)|^p}{\tilde{\psi}_\rho^{p-1}\prod_{j=1}^n|x_j|^{(p-1)\sigma_j}}\,dx \leq C\rho^{-2p}\prod_{j=1}^n\left(\int_\varepsilon^{2\rho} r_j^{s_j^*+N_j-1-(p-1)\sigma_j}\,dr_i\right). \tag{33}$$

Introduisons les ensembles

$$\begin{cases} X_\sigma^+ &= \{i \in \{1,2,...,n\};\ s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i > 0\}, \\ X_\sigma &= \{i \in \{1,2,...,n\};\ s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i = 0\}, \\ X_\sigma^- &= \{i \in \{1,2,...,n\};\ s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i < 0\}. \end{cases}$$

Puisque $\tilde{\mathcal{N}}_i \subset \{x \in K_\varepsilon;\ \ \varepsilon \leq r_i \leq 2\rho\}$, alors

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i}\frac{|\Delta_i(\tilde{\psi}_\rho)|^p}{\tilde{\psi}_\rho^{p-1}\prod_{j=1}^n|x_j|^{(p-1)\sigma_j}}\,dx \\ &\qquad\leq C\rho^{-2p+\sum_{i\in X_\sigma^+}\left(s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i\right)}\,[\ln\rho]^{\mathrm{card}(X_\sigma)}\,\varepsilon^{\sum_{i\in X_\sigma^-}\left(s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i\right)}, \\ &\qquad\leq C\rho^{-2p+\sum_{i\in X_\sigma^+}\left(s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i\right)}\,[\ln\rho]^{\mathrm{card}(X_\sigma)}. \end{aligned} \tag{34}$$

On choisit comme fonction test finale

$$\tilde{\varphi}_\rho(x,t) = \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right)\tilde{\psi}_\rho(x).$$

Reste à établir les deux dernières estimations portant sur $\tilde{\varphi}_\rho$. Les mêmes calculs utilisés dans (10) montrent que

$$\int_0^{+\infty}\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i}\frac{|\Delta_i(\tilde{\varphi}_\rho)|^p}{\tilde{\varphi}_\rho^{p-1}\prod_{j=1}^n|x_j|^{(p-1)\sigma_j}}\,dx\,dt \leq C\rho^{\theta-2p+\sum_{i\in X_\sigma^+}\left(s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i\right)}\,[\ln\rho]^{\mathrm{card}(X_\sigma)}. \tag{35}$$

En notant $|x|^{(p-1)\sigma} := \prod_{i=1}^n |x_i|^{(p-1)\sigma_i}$ et $\mathcal{C}(\varepsilon,\rho) := \prod_{i=1}^n \{\varepsilon \le r_i = |x_i| \le 2\rho\}$, nous avons

$$\int\int_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial\tilde\varphi_\rho}{\partial t}\right|} \frac{\left|\frac{\partial\tilde\varphi_\rho}{\partial t}\right|^p}{\tilde\varphi_\rho^{p-1}|x|^{(p-1)\sigma}}\,dx\,dt \le \int_{\mathcal{C}(\varepsilon,\rho)} \frac{\tilde\psi_\rho(x)}{|x|^{(p-1)\sigma}}\,dx \int_{\operatorname{supp}\left|\frac{d\eta}{dt}(t/\rho^\theta)\right|} \frac{\left|\frac{d\eta}{dt}(t/\rho^\theta)\right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\,dt.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}(\varepsilon,\rho)} \frac{\tilde\psi_\rho(x)}{|x|^{(p-1)\sigma}}\,dx &= \int_{K_\omega} \Phi(\omega)\,d\omega \int_\varepsilon^{2\rho} \tilde\xi_*\,\xi_2 \frac{\prod_{i=1}^n r_i^{N_i-1}}{\prod_{i=1}^n r_i^{(p-1)\sigma_i}}\,dr,\\
&\le |K_\omega| \int_\varepsilon^{2\rho} \tilde\xi_* \frac{\prod_{i=1}^n r_i^{N_i-1}}{\prod_{i=1}^n r_i^{(p-1)\sigma_i}}\,dr, \quad (\text{car} \quad 0 \le \xi_2 \le 1),\\
&\le |K_\omega| \int_\varepsilon^{2\rho} \prod_{i=1}^n r_i^{s_i^*+N_i-1-(p-1)\sigma_i}\,dr, \quad (\text{car} \quad 0 \le r_i^{s_i^*} - \varepsilon^{s_i^*} \le r_i^{s_i^*}),\\
&\le |K_\omega| \prod_{i=1}^n \left(\int_\varepsilon^{2\rho} r_i^{s_i^*+N_i-1-(p-1)\sigma_i}\,dr_i\right),
\end{aligned}$$

nous avons donc

$$\int_{\mathcal{C}(\varepsilon,\rho)} \frac{\tilde\psi_\rho(x)}{|x|^{(p-1)\sigma}}\,dx \le C\rho^{\sum_{i\in X_\sigma^+}\left(s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i\right)}\,[\ln\rho]^{\operatorname{card}(X_\sigma)}\,\varepsilon^{\sum_{i\in X_\sigma^-}\left(s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i\right)}.$$

Finalement, nous obtenons l'estimation

$$\int\int_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial\tilde\varphi_\rho}{\partial t}\right|} \frac{\left|\frac{\partial\tilde\varphi_\rho}{\partial t}\right|^p}{\tilde\varphi_\rho^{p-1}|x|^{(p-1)\sigma}}\,dx\,dt \le c_\varepsilon \rho^{-\theta(p-1)+\sum_{i\in X_\sigma^+} s_i^*+N_i-(p-1)\sigma_i}\,[\ln\rho]^{\operatorname{card}(X_\sigma)}. \tag{36}$$

4.1 Inéquations elliptiques

Considérons le problème elliptique non linéaire

$$(E_\sigma)\quad \begin{cases} -\Delta u \ \ge\ \prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma_i} u^q, & x \in K_\varepsilon,\\ u(x) \ \ge\ 0, & x \in \partial K_\varepsilon. \end{cases}$$

Définition 4. Soit $u \in C(\overline{K_\varepsilon})$. La fonction u est dite solution faible du problème (E_σ) si pour toute fonction positive $\varphi \in \mathcal{C}^2(K_\varepsilon\times]0,+\infty[)$ à support compact telle que $\varphi|_{\partial K_\varepsilon} = 0$, on a

$$\int_{K_\varepsilon} \prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma_i} u^q(x)\varphi(x)\,dx \le -\int_{K_\varepsilon} u(x)\Delta\varphi(x)\,dx + \int_{\partial K_\varepsilon} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x)\,dx,$$

où $\partial\varphi/\partial\nu$ désigne la dérivée normale de φ.

Théorème 5. *Si* $\sum_{i\in X_\sigma^+}^n \sigma_i > -2$ *et*

$$1 < q < q^*_{e,\sigma} = 1 + \frac{2 + \sum_{i\in X_\sigma^+}\sigma_i}{\sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^* + N_i) - 2},$$

alors le problème (E_σ) *ne possède aucune solution faible non triviale.*

Preuve. On notera $|x|^\sigma = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma_i}$ et $|x|^{(q'-1)\sigma} = \prod_{i=1}^n |x_i|^{(q'-1)\sigma_i}$. Soit $u(x)$ une solution faible, non identiquement nulle. En choisissant $\varphi(x) = \tilde\psi_\rho(x)$ dans la définition 4 on a

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varepsilon} |x|^\sigma u^q(x)\tilde\psi_\rho(x)\,dx \\
&\quad\le -\int_{K_\varepsilon} u(x)\Delta\tilde\psi_\rho(x)\,dx + \int_{\partial K_\varepsilon} u(x)\frac{\partial\tilde\psi_\rho}{\partial\nu}\,dx, \\
&\quad\le -\int_{K_\varepsilon} u(x)\Delta\tilde\psi_\rho(x)\,dx, \\
&\quad\le -\sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\mathcal N}_i} u(x)\Delta_i\tilde\psi_\rho(x)\,dx, \\
&\quad\le \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\mathcal N}_i} u(x)|\Delta_i\tilde\psi_\rho(x)|\,dx, \\
&\quad\le \sum_{i=1}^n \left(\int_{\tilde{\mathcal N}_i} |x|^\sigma u^q(x)\tilde\psi_\rho(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\tilde{\mathcal N}_i}\frac{|\Delta_i\tilde\psi_\rho(x)|^{q'}}{|x|^{(q'-1)\sigma}\tilde\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right)^{1/q'}, \\
&\quad\le \left(\int_{K_\varepsilon} |x|^\sigma u^q(x)\tilde\psi_\rho(x)\,dx\right)^{1/q}\sum_{i=1}^n\left(\int_{\tilde{\mathcal N}_i}\frac{|\Delta_i\tilde\psi_\rho(x)|^{q'}}{\tilde\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right)^{1/q'}, \\
&\quad\le \frac12\left(\int_{K_\varepsilon} |x|^\sigma u^q(x)\tilde\psi_\rho(x)\,dx\right) + C\sum_{i=1}^n\left(\int_{\mathcal N_i}\frac{|\Delta_i\tilde\psi_\rho(x)|^{q'}}{|x|^{(q'-1)\sigma}\tilde\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{K_\varepsilon} |x|^\sigma u^q(x)\tilde\psi_\rho(x)\,dx &\le C\sum_{i=1}^n\left(\int_{\tilde{\mathcal N}_i}\frac{|\Delta_i\tilde\psi_\rho(x)|^{q'}}{|x|^{(q'-1)\sigma}\tilde\psi_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right) \\
&\le C\rho^{-2q' + \sum_{i\in X_\sigma^+}\left(s_i^* + N_i - (q'-1)\sigma_i\right)}[\ln\rho]^{\mathrm{card}(X_\sigma)},
\end{aligned}$$

Notons que pour $q > 1$, on a

$$-2q' + \sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^* + N_i - (q'-1)\sigma_i) < 0 \quad \text{équivaut}$$

$$1 < q < q^*_{e,\sigma} = 1 + \frac{2 + \sum_{i\in X_\sigma^+}\sigma_i}{-2 + \sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^* + N_i)}$$

et dans ce cas $\int_{K_\varepsilon} |x|^\sigma u^q(x)\tilde\psi_\rho(x)\,dx$ est bornée uniformément par rapport à ρ. D'après le théorème de la convergence monotone, on déduit que l'application

$$x \equiv (r,\omega) \longmapsto |x|^\sigma u^q(x)\,\xi_*(r)\,\Phi(\omega)$$

est dans $L^1(K_\varepsilon)$. D'après ce qui précède, on sait que $\displaystyle\int_{K_\varepsilon} |x|^\sigma u^q(x)\tilde{\psi}_\rho(x)\,dx$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i} |x|^\sigma u^q(x)\tilde{\psi}_\rho(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i} \frac{|\Delta_i\tilde{\psi}_\rho(x)|^{q'}}{|x|^{(q'-1)\sigma}\tilde{\psi}_\rho^{q'-1}(x)}\,dx\right)^{1/q'}, \\ &\leq C\sum_{i=1}^n \left(\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i} |x|^\sigma u^q(x)\tilde{\psi}_\rho(x)\,dx\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée on conclut que

$$\int_{K_\varepsilon} u^q(r,\omega)\xi_*(r)\,\Phi(\omega)\prod_{i=1}^n r_i^{N_i+\sigma_i-1}\,dr\,d\omega \equiv 0.$$

Ceci entraîne que $u \equiv 0$, ce qui contredit le fait que u est une solution faible non triviale de (E_σ). ■

4.2 Inéquations paraboliques

Considérons le problème parabolique non linéaire

$$(P_\sigma)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq \prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma_i}u^q, & x \in K_\varepsilon\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) \geq 0, & (x,t) \in \partial K_\varepsilon\times]0,+\infty[, \\ u(x,0) \geq 0, & x \in K_\varepsilon. \end{cases}$$

Définition 5. Soit $u \in C(\overline{K}_\varepsilon \times [0,+\infty[)$. La fonction u est dite solution faible du problème (P_σ) si pour toute fonction positive $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(K_\varepsilon\times]0,+\infty[)$ à support compact telle que $\varphi|_{\partial K_\varepsilon\times]0,+\infty[} = 0$, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon}\prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma_i}u^q\varphi\,dx\,dt + \int_{K_\varepsilon} u(x,0)\varphi(x,0)\,dx \leq \\ &\qquad -\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon} u\left(\Delta\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dx\,dt + \int_0^{+\infty}\int_{\partial K_\varepsilon} u(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x,t)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Théorème 6. *Si* $\sum_{i\in X_\sigma^+}^n \sigma_i > -2$ *et*

$$1 < q < q_{p,\sigma}^* = 1 + \frac{2 + \sum_{i\in X_\sigma^+}\sigma_i}{\sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^* + N_i)}$$

alors le problème (P_σ) *ne possède aucune solution faible non triviale.*

Preuve. Supposons que le problème (P_σ) possède une solution faible u non triviale avec $1 < q < q_{p,\sigma}^*$. En choisissant $\varphi(x,t) = \tilde{\varphi}_\rho(x,t)$ dans la définition 5 on a

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty}\int_K |x|^\sigma u^q\tilde{\varphi}_\rho\,dx\,dt + \int_{K_\varepsilon} u(x,0)\tilde{\varphi}_\rho(x,0)\,dx \leq \\ &\qquad -\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon} u\left(\Delta\tilde{\varphi}_\rho + \frac{\partial\tilde{\varphi}_\rho}{\partial t}\right)dx\,dt + \int_0^{+\infty}\int_{\partial K_\varepsilon} u(x,t)\frac{\partial\tilde{\varphi}_\rho}{\partial\nu}(x,t)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale du côté gauche (resp. droit) de la précédente inégalité étant positive (resp. négative), on déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_K |x|^\sigma u^q \tilde{\varphi}_\rho\,dx\,dt \\
&\qquad \le\ -\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon} u\left(\Delta\tilde{\varphi}_\rho + \frac{\partial\tilde{\varphi}_\rho}{\partial t}\right)dx\,dt, \\
&\qquad \le\ -\sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty}\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i} u\,\Delta_i\tilde{\varphi}_\rho\,dx\,dt - \int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon} u\,\frac{\partial\tilde{\varphi}_\rho}{\partial t}\,dx\,dt, \\
&\qquad \le\ \sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty}\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i} u\,|\Delta_i\tilde{\varphi}_\rho|\,dx\,dt + \int\int_{\mathrm{supp}\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}_\rho}{\partial t}\right|} u\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}_\rho}{\partial t}(x,t)\right|dx\,dt, \\
&\qquad \le\ C\left(\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon}|x|^\sigma u^q\tilde{\varphi}_\rho\right)^q \sum_{i=1}^n\left(\int_0^{+\infty}\int_{\tilde{\mathcal{N}}_i}\frac{|\Delta_i\tilde{\varphi}_\rho|^{q'}}{|x|^{(q'-1)\sigma}\tilde{\varphi}_\rho^{q'-1}}\,dx\,dt\right)^{1/q'} + \\
&\qquad\quad\ C\left(\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon}|x|^\sigma u^q\tilde{\varphi}_\rho\right)^q\left(\int\int_{\mathrm{supp}\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}_\rho}{\partial t}\right|}\frac{|\partial\tilde{\varphi}_\rho/\partial t|^{q'}}{|x|^{(q'-1)\sigma}\tilde{\varphi}_\rho^{q'-1}}\right)^{1/q'}.
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière que dans la preuve précédente et en utilisant (35) et (36) on obtient

$$\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon}|x|^\sigma u^q\tilde{\varphi}_\rho\,dx\,dt \le C\left(\rho^{a(\theta)}+\rho^{b(\theta)}\right)[\ln\rho]^{\mathrm{card}(X_\sigma)},$$

où

$$\begin{cases} a(\theta) &=& \theta - 2q' + \sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^* + N_i - (q'-1)\sigma_i), \\ b(\theta) &=& -\theta(q'-1) + \sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^* + N_i - (q'-1)\sigma_i). \end{cases}$$

Si l'on choisit $\theta = 2$ alors

$$a(2) = b(2) = -2(q'-1) + \sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^* + N_i - (q'-1)\sigma_i).$$

D'où, il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait, pour ρ assez grand,

$$\int_0^{+\infty}\int_{K_\varepsilon}|x|^\sigma u^q\tilde{\varphi}_\rho\,dx\,dt \le C\rho^{-2(q'-1)+\sum_{i\in X_\sigma^+}(s_i^*+N_i-(q'-1)\sigma_i)}[\ln\rho]^{\mathrm{card}(X_\sigma)}.$$

Pour $q > 1$, la condition $a(2) < 0$ est équivalente à $1 < q < q^*_{p,\sigma}$. En raisonnant de la même manière qu'à la fin des théorèmes précédents, on déduit le résultat. ∎

4.3 Inéquations d'évolution d'ordre arbitraire en temps

On va énoncer, sans donner de preuve, un résultat similaire à celui obtenu au paragraphe 2.3

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \ge \prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma_i}u^q, & (x,t)\in K_\varepsilon\times]0,+\infty[, \\ u(x,t)\ge 0, & (x,t)\in K_\varepsilon\times]0,+\infty[, \\ \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\ge 0, & x\in K_\varepsilon. \end{cases} \tag{37}$$

Définition 6. Soit $u(x,t) \in C(\overline{K}_\varepsilon \times [0,+\infty[)$ et supposons que les traces des fonctions $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1,\dots,k-1$, soient bien définies pour $t = 0$. La fonction $u(x,t)$ est dite solution faible du problème (37) si pour toute fonction positive $\varphi(x,t) \in \mathcal{C}^{2,k}(K_\varepsilon \times]0,\infty[)$ à support compact (dans $\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$) telle que $\varphi|_{\partial K_\varepsilon \times]0,\infty[} = 0$, on a

$$\int_0^\infty \int_{\partial K_\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, dxdt + \int_0^\infty \int_{K_\varepsilon} u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dxdt$$
$$\geq \int_0^\infty \int_{K_\varepsilon} \prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma_i} u^q \varphi\, dxdt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x,0)\, dx$$
$$+ \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) \varphi(x,0)\, dx.$$

Théorème 7. *Supposons que* $\sum_{i \in X_\sigma^+}^n \sigma_i > -2$ *et*

$$1 < q \leq q_k^* = 1 + \frac{2 + \sum_{i \in X_\sigma^+}^n \sigma_i}{\sum_{i \in X_\sigma^+}^n (s_i^* + N_i) - 2 + 2/k}.$$

Alors le problème (37) *n'a aucune solution non triviale.*

Un résultat analogue peut être obtenu pour le système d'inéquations

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |v|^{q_1}, & (x,t) \in K_\varepsilon \times]0,\infty[, \\ \frac{\partial^k v}{\partial t^k} - \Delta v \geq |u|^{q_2}, & (x,t) \in K_\varepsilon \times]0,\infty[, \\ u(x,t) \geq 0, \quad v(x,t) \geq 0, & (x,t) \in \partial K_\varepsilon \times]0,\infty[, \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) \geq 0, \quad \frac{\partial^{k-1} v}{\partial t^{k-1}}(x,0) \geq 0, & x \in K_\varepsilon. \end{cases} \tag{38}$$

Références

[1] C. Bandle, H.A. Levine, *On the existence and nonexistence of global solutions of reaction–diffusion equations in sectorial domains*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.316 (1989), 595–622.

[2] C. Bandle, H.A. Levine, *Fujita type results for convective-like reaction-diffusion equations in exterior domains*, Z. Angew. Math. Phys., Vol.40 (1989), 665–676.

[3] C. Bandle, M. Essen, *On positive solutions of Emden equations in cone-like domains*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol.112 (1990), 319–338.

[4] K. Deng, H.A. Levine, *The role of critical exponents in blow-up theorems : the sequel*, J. Math. Anal. Appl., Vol.243 (2000), 85–126.

[5] H. Egnell, *Positive solutions of semilinear equations in cones*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.330 (1992), 191–201.

[6] N. Igbida, M. Kirane, *Blowup for completely coupled Fujita type reaction-diffusion system*, Collocuim Mathematicum, Vol.92 (2002), 87–96.

[7] G.G. Laptev, *The absence of global positive solutions of systems of semilinear elliptic inequalities in cones*, Russian Acad. Sci. Izv. Math., Vol.64 (2000), 108–124.

[8] G.G. Laptev, *On the absence of solutions to a class of singular semilinear differential inequalities*, Proc. Steklov Inst. Math., Vol.232 (2001), 223–235.

[9] G.G. Laptev, *Some nonexistence results for higher–order evolution inequalities in cone–like domains*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., Vol.7 (2001), 87–93.

[10] H.A. Levine, *The role of critical exponents in blow-up theorems*, SIAM Rev., Vol.32 (1990), 262–288.

[11] H.A. Levine, P. Meier, *A blowup result for the critical exponent in cones*, Israel J. Math., Vol.67 (1989), 1–7.

[12] H.A. Levine, P. Meier, *The value of the critical exponent for reaction-diffusion equations in cones*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol.109 (1990), 73–80.

[13] E. Mitidieri, S.I. Pohozaev, *Nonexistence of global positive solutions to quasilinear elliptic inequalities*, Dokl. Russ. Acad. Sci., Vol.57 (1998), 250–253.

[14] E. Mitidieri, S.I. Pohozaev, *Nonexistence of weak solutions for some degenerate and singular hyperbolic problems on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Steklov Inst. Math., Vol.232 (2001), 240–259.

[15] E. Mitidieri, S.I. Pohozaev, *A priori Estimates and Nonexistence of Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities*, Moscow, Nauka, 2001. (Proc. Steklov Inst. Math., Vol.234).

[16] S. Ohta, A. Kaneko, *Critical exponent of blowup for semilinear heat equation on a product domain*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math., Vol.40 (1993), 635–650.

[17] S.I. Pohozaev, *Essential nonlinear capacities induced by differential operators*, Dokl. Russ. Acad. Sci., Vol.357 (1997), 592–594.

[18] S.I. Pohozaev, A. Tesei, *Blow-up of nonnegative solutions to quasilinear parabolic inequalities*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., Vol.11 (2000), 99–109.

[19] S.I. Pohozaev, A. Tesei, *Critical exponents for the absence of solutions for systems of quasilinear parabolic inequalities*, Differ. Uravn., Vol.37 (2001), 521–528.

[20] S.I. Pohozaev, L. Veron, *Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequalities*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), Vol.29 (2000), 393–420.

[21] S.I. Pohozaev, L. Veron, *Nonexistence results of solutions of semilinear differential inequalities on the Heisenberg group*, Manuscripta math., Vol.102 (2000), 85–99.

[22] A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov and A.P. Mikhailov, "Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations", Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English translation : Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1995.

[23] Qi Zhang, *Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds*, Duke Math. J., Vol.97 (1999), 515–539.

[24] Qi Zhang, *The quantizing effect of potentials on the critical number of reaction–diffusion equations*, J. Differential Equations, Vol.170 (2001), 188–214.

[25] Qi Zhang, *Global lower bound for the heat kernel of* $-\Delta + \frac{c}{|x|^2}$, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.129 (2001), 1105–1112.

Abdallah El Hamidi
Université de La Rochelle
Laboratoire de Mathématiques
Avenue M. Crépeau, 17000 La Rochelle, France
Adresse électronique : *aelhamid@univ-lr.fr*

Gennady G. Laptev
Department of Function Theory
Steklov Mathematical Institute
Gubkina 8, 117966 Moscow, Russia
Adresse électronique : *laptev@home.tula.net*